# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2025**

# MATHÉMATIQUES

## Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

**Exercice 1 (6 points)**

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1er janvier $2025$, on introduit $6\,000$ individus dans chacun des milieux A et B.

**Partie A**

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0{,}93$. Pour tout entier naturel $n$, $u_n$ représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier $2026$.
2. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie B**

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite $(v_n)$ définie par $v_0 = 6$ et pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = -0{,}05{v_n}^2 + 1{,}1v_n$.

Pour tout entier naturel $n$, $v_n$ représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier $2026$.

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

2. Démontrer que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
4. En déduire que la suite $(v_n)$ est convergente vers une limite $\ell$.
5. **a.** Justifier que la limite $\ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de $\ell$.
   **b.** Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie C**

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   **a.** Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   **b.** Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

**Exercice 2 (6 points)**

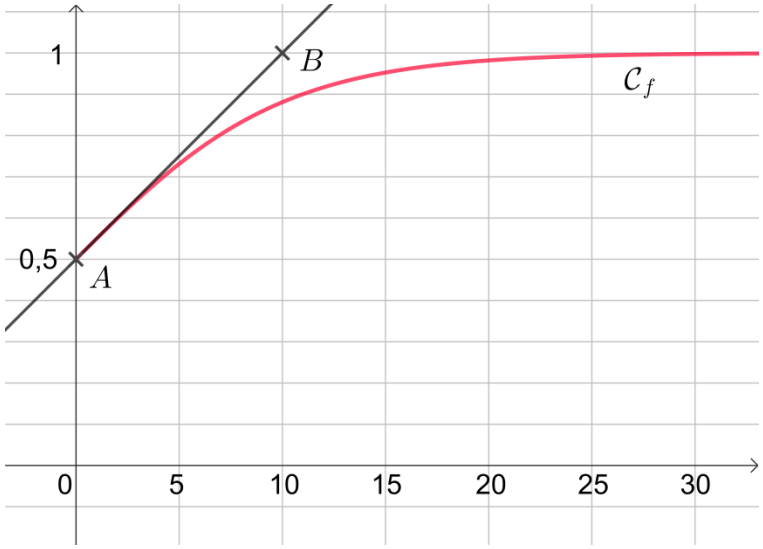
**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bx}}$$

où $a$ et $b$ sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
La fonction $f$ admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :




On considère les points $A(0; 0{,}5)$ et $B(10; 1)$.
On admet que la droite $(AB)$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A$.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite $(AB)$.
5. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de $x$ et de la constante $b$.
   **b.** En déduire la valeur de $b$.

**Partie B**

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}2x}}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .
2. Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ .
3. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ positif tel que $f(\alpha) = 0{,}97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel $\alpha$ par deux nombres entiers consécutifs.

**Partie C**

1. Montrer que, pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ , $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$ .
2. En déduire une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40}\int_0^{40} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}\,\mathrm{d}x$$

*On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.*

**<u>Exercice 3</u> (4 points)**

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant $64$ caractères : les $26$ lettres majuscules, les $26$ lettres minuscules, les chiffres de $0$ à $9$ et deux autres caractères spéciaux.

*Les parties A, B et C sont indépendantes.*

**Partie A**

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64.
Par exemple, « gP3g » est une telle séquence.
Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3. **a.** Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
   **b.** En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
   **c.** Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
   **d.** Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

**Partie B**

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de $250$ caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à $0{,}01$ et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à $10^{-3}$ près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de $16$ caractères soient mal transmis est négligeable » ?

**Partie C**

On s'intéresse maintenant à la transmission de $4$ séquences de $250$ caractères.
On note $X_1$, $X_2$, $X_3$ et $X_4$ les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des $4$ séquences. On admet que les variables aléatoires $X_1$, $X_2$, $X_3$ et $X_4$ sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire $X$ définie en **partie B**.
On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $S$.

## Exercice 4 (4 points)

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.
On considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ et $C(0; 3; 2)$.

1. **a.** Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.
   **b.** Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan $(ABC)$.
   **c.** En déduire que le plan $(ABC)$ admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2. **a.** Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note $(d)$ leur droite d'intersection.
   **b.** Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite $(d)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que le point $M(2; 1; 3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
   En déduire une représentation paramétrique de la droite $(d)$.
5. Montrer que la droite $(d)$ est aussi incluse dans le plan $(ABC)$.
   Que peut-on dire des trois plans $(ABC)$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ?