BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé..

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

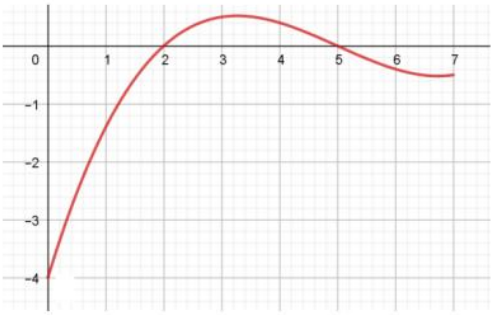
1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$
b. $4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$
c. $4\mathrm{e}^{-2x}$
d. $(x+2)\mathrm{e}^{-2x}$

2. Un élève de première générale choisit trois spécialités parmi les douze proposées.
Le nombre de combinaisons possibles est :

a. 1 728
b. 1 320
c. 220
d. 33

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;7]$ est :

a.

x	0	3,25	7
$f(x)$		↗	↘

b.

x	0	2	5	7
$f(x)$		↘	↗	↘

c.

x	0	2	5	7
$f(x)$		↗	↘	↗

d.

x	0	2	7
$f(x)$		↗	↘

4. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B.
Une étude statistique montre que $2{,}8\ \%$ des puces ont le défaut A, $2{,}2\ \%$ des puces ont le défaut B et, heureusement, $95{,}4\ \%$ des puces n'ont aucun des deux défauts.

La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est :

- **a.** $0{,}05$
- **b.** $0{,}004$
- **c.** $0{,}046$
- **d.** On ne peut pas le savoir

5. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

D'après ce tableau de variation :

- **a.** f' est positive sur $\mathbb{R}$
- **b.** f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$
- **c.** f' est négative sur $\mathbb{R}$
- **d.** f' est positive sur $[-1\,;\,+\infty[$

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

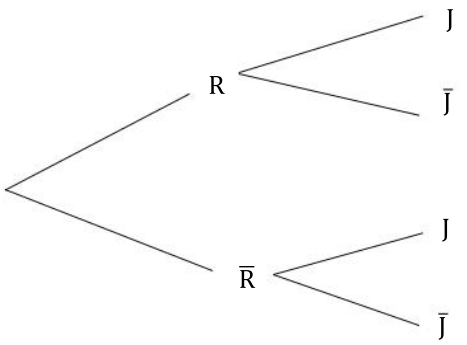
(Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'événement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'événement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{J})$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.

2. Calculer $\mathrm{P}(X = 5)$ et interpréter le résultat.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses $5\ 000$ collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que $85\ \%$ de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = 0,85a_n + 450$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$v_n = a_n - 3\ 000$$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$a_n = -2\ 800 \times 0,85^n + 3\ 000$$

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à $2\ 500$, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$
où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :
$\mathrm{A}(2\,;\,-1\,;\,0)$; $\mathrm{B}(3\,;\,-1\,;\,2)$; $\mathrm{C}(0\,;\,4\,;\,1)$ et $\mathrm{S}(0\,;\,1\,;\,4)$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Montrer que les coordonnées du point H sont $\mathrm{H}(2\,;\,2\,;\,3)$.

4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $\mathrm{V} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5. a. Calculer la longueur SA.

b. On indique que $\mathrm{SB} = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

EXERCICE B - Équations différentielles

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout réel x :
$$g'(x) = \frac{-2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}$$
2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle
$$(\mathrm{E}): \quad 3y' + y = 0$$
Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $M(0\,;2)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$
et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M(0\,;2)$ admet une équation de la forme :
$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$
   b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.
Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.
2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse -2.